DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM III

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1927
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM III

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO



KRAKÓW 1927
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM III

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1927
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się T. I za rok 1922 i T. II za rok 1923.

Sprawozdanie

z działalności Oddziału Lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego

za czas od 18. X. 1923 — 31. XI. 1925.

Oddział Lwowski Polskiego Twa Mat. liczy w dniu 1. I. 1926 członków 34. Siedzibą Oddziału jest Lwów.

Władze Oddziału są wybierane na Walnem Zebraniu Oddziału. W okresie sprawozdawczym skład osobowy władz Oddziału był następujący:

W czasie od 18. X. 1924 — 15. XI. 1925:

Prezes Oddziału: Prof. Dr. Antoni Łomnicki

Wiceprezes: Prof. Dr. Maksymiljan T. Huber

Sekretarz: Dr. Władysław Nikliborc

Skarbnik: P. Władysław Lichtenberg

Członkowie Zarządu: Prof. Eustachy Żyliński i Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz.

Członkowie Komisji rewizyjnej: Prof. Dr. Marcin Ernst i Prof. Dr. Lucjan Grabowski.

W czasie od 15. XI. 1925 — aż do chwili obecnej:

Prezes: Prof. Dr. Maks. Huber

Wiceprezes: Prof. Dr. Włodzimierz Stożek

Sekretarz: Dr. Wł. Nikliborc (równocześnie delegat do Zarządu Głównego)

Skarbnik: P. Włodzimierz Lichtenberg.

Członkowie Zarządu: Prof. Dr. St. Ruziewicz i Prof. E. Żyliński.

Członkowie Komisji rewizyjnej: Prof. Dr. M. Ernst i Prof. Dr. L. Grabowski.

W okresie sprawozdawczym Oddział odbył 42 posiedzeń nau-

kowych, na których, prócz komunikatów członków z prac własnych, przedstawiano także sprawozdania z bieżącej literatury naukowej.
Wykaz posiedzeń naukowych z uwzględnieniem ich przedmiotu przedstawia się następująco:

1. Posiedzenie z dnia 18. X. 1923.

1. Komunikat. Prof. Dr. W. Stożek: „O zakresie zbieżności kolejnych przybliżeń w równaniach różniczkowych zwyczajnych".
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.

2. Posiedzenie z dnia 10. XI. 1923.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. E. Żyliński
b) Prof. Dr. S. Ruziewicz.

3. Posiedzenie z dnia 17. XI. 1923.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. S. Banach
b) Prof. Dr. H. Steinhaus.

4. Posiedzenie z dnia 20. XI. 1923.

Sprawozdanie z literatury: Prof. E. Żyliński.

5. Posiedzenie z dnia 7. XII. 1923.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. S. Ruziewicz
b) Prof. Dr. H. Steinhaus.

6. Posiedzenie z dnia 10. XII. 1923.

1. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.
2. Komunikat: Prof. Dr. H. Steinhaus: „O pewnem twierdzeniu z teorji operacji addytywnych i ciągłych".

7. Posiedzenie z dnia 14. XII. 1923.

Komunikaty: a) Prof. E. Zyliński: „O mnożeniu typów grup"
b) Prof. Dr. W. Stożek: „O pewnem twierdzeniu Williamsa z algebry"
c) Prof. Dr. A. Łomnicki: „O pewnem twierdzeniu Williamsa z algebry".

8. Posiedzenie z dnia 11. I. 1924.

1. Komunikat: P. W. Nikliborc: „O zagadnieniach na wartości brzegowe w równaniu $y'' = f(x, y, y')$"
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.

9. Posiedzenie z dnia 18. I. 1924.

1. Komunikat: P. J. Schauder: „Z teorji odwzorowań"
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. S. Banach.

10. Posiedzenie z dnia 25. I. 1924.

1. Komunikat: P. S. Kaczmarz: „O równaniach funkcyjnych"
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. S. Banach

11. Posiedzenie z dnia 8. II. 1924.

1. Komunikat: P. C. Burstin: „Geometrja przestrzeni n-wymiarowej"
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.

12. Posiedzenie z dnia 15. II. 1924.

Komunikaty: a) Prof. Dr. L. Grabowski: „O kierunkach przyspieszeń 3-ch ciał, przyciągających się według prawa Newtona"
b) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O mierzeniu pól płaskich"
c) Prof. Dr. S. Banach: „Z teorji funkcji zmiennej rzeczywistej".

13. Posiedzenie z dnia 22. II. 1924.

1. Komunikat: P. J. Schauder: „Z teorji odwzorowań".
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.

14. Posiedzenie z dnia 29. II. 1924.

Komunikat: Prof. Dr. A. Łomnicki: „O aksjomatyce geometrji".

15. Posiedzenie z dnia 7. III. 1924.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. S. Ruziewicz
b) P. S. Kaczmarz.

16. Posiedzenie z dnia 14. III. 1924.

Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. W. Stożek.

17. Posiedzenie z dnia 21. III. 1924.

Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. W. Stożek.

18. Posiedzenie z dnia 29. III. 1924.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. W. Stożek
b) Prof. Dr. St. Ruziewicz

19. Posiedzenie z dnia 4. IV. 1924.

Komunikaty: a) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O punktach wymiernych na krzywej Jordana"
b) P. H. Auerbach: „O pochodnych symetrycznych".

20. Posiedzenie z dnia 21. V. 1924.

Komunikat: Prof. Dr. H. Steinhaus: „O pewnym systemie ortogonalnym".

21. Posiedzenie z dnia 1. VI. 1924.

Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. H. Steinhaus
b) Prof. Dr. S. Banach.

22. Posiedzenie z dnia 30. IX. 1924.

1. Komunikat: Prof. Dr. S. Banach: „O równaniach funkcyjnych".
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. S. Banach.

23. Posiedzenie z dnia 14. X. 1924.

1. Komunikaty: a) Dr. S. Kaczmarz: „O sumowalności szeregów ortogonalnych".
b) Dr. J. Schauder: „O funkcjach wypukłych"
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. S. Ruziewicz.

24. Posiedzenie z dnia 21. X. 1924.

1. Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. A. Łomnicki.
b) Prof. Dr. W. Stożek
2. Komunikaty: a) Dr. W. Nikliborc: „Uwagi o twierdzeniu Angheluzzy".
b) Prof. Dr. W. Stożek: „O funkcjach harmonicznych".

25. Posiedzenie z dnia 28. X. 1924.

Komunikaty: a) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O sumowalności ciągu pierwszą średnią"
b) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O sumowalności ciągu pierwszych średnich".
c) P. H. Auerbach: „O całce Poissona".

26. Posiedzenie z dnia 18. XI. 1924.

1. Komunikat: Prof. Dr. W. Stożek: „O funkcjach harmonicznych“
2. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. A. Łomnicki.

27. Posiedzenie z dnia 2. XII. 1924.

1. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus
2. Komunikaty: a) Dr. St. Kaczmarz: „Dowód pewnego twierdzenia Weyla z teorji szeregów ortogonalnych“
   b) P. Wł. Orlicz: „O pewnem twierdzeniu z teorji szeregów sumowalnych“.

28. Posiedzenie z dnia 9. XII. 1924.

1. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus
2. Komunikaty: a) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O obliczaniu momentów statycznych pól płaskich“.
   b) P. Buchbinder: „O rozwinięciu trójkowem pewnej liczby“
   c) Dr. W. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“.

29. Posiedzenie z dnia 17. I. 1925.

1. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus
2. Komunikat: Prof. Dr. A. Łomnicki: „O rozwinięciach pierwiastków na iloczyny nieskończone“.

30. Posiedzenie z dnia 27. I. 1925.

Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. H. Steinhaus.

31. Posiedzenie z dnia 9. II. 1925.

Komunikaty: a) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O zaczernianiu powierzchni obrotowych przez linje geodezyjne“
b) „Szeregi trygonometryczne lakunarne“
c) „Przekątnia średnich Cesaro“.

32. Posiedzenie z dnia 16. II. 1925.

Komunikaty: a) Dr. W. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“ Część II.

b) Dr. J. Schauder: „O nielinjowych operacjach w przestrzeniach funkcyjnych“.

33. Posiedzenie z dnia 15. III. 1925.

1. Komunikaty: a) P. Auerbach: „Dowód pewnego twierdzenia prof. Banacha“
   b) Dr. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“ Część III.
2. Sprawozdanie z literatury: Dr. W. Nikliborc.

34. Posiedzenie z dnia 28. IV. 1925.

Komunikaty: a) Dr. S. Kaczmarz: „O pewnem twierdzeniu Rademachera“
b) Dr. W. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“ Część IV.

35. Posiedzenie z dnia 5. V. 1925.

Komunikaty: a) Prof. Dr. W. Sierpiński: „Uwagi o zbieżności szeregów nieskończonych“
b) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O pewnem zagadnieniu z mechaniki klasycznej“.

36. Posiedzenie z dnia 23. VI. 1925.

1. Sprawozdanie z literatury: a) Prof. Dr. H. Steinhaus
   b) Dr. S. Kaczmarz
2. Komunikaty: a) Dr. W. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“ Cz. V.
   b) „O krzywych ekwipotencjalnych funkcji Greena“.

37. Posiedzenie z dnia 15. IX. 1925.

Komunikaty: a) Prof. Dr. S. Banach: „O pewnych funkcjonałach prowadzących do równań cząstkowych“
b) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O pewnem zadaniu z rachunku prawdopodobieństwa“
c) Doc. Dr. Böttcher: „O pochodnej uogólnionej“.

38. Posiedzenie z dnia 6. X. 1925.

Komunikat: Dr. S. Kaczmarz: „O sumowalności szeregów ortogonalnych“.

39. Posiedzenie z dnia 7. XI. 1925.

1. Sprawozdanie z literatury: Prof. Dr. S. Banach.
2. Komunikat: Dr. W. Nikliborc: „O funkcjach hyperharmonicznych“ Cz. VI.

40. Posiedzenie z dnia 23. XI. 1925.

Komunikaty: a) Prof. Dr. S. Banach: „O prawdopodobieństwie przeliczalnem“
b) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O zbieżności szeregów ortogonalnych“
c) Dr. W. Nikliborc: „O krzywych wypukłych“.

41. Posiedzenie z dnia 5. XII. 1925.

Komunikaty: a) Prof. Dr. H. Steinhaus: „O zbieżności szeregów ortogonalnych“
b) P. Birnbaum: „O twierdzeniu p. Noaillon“.

42. Posiedzenie z dnia 12. XII. 1925.

Komunikat: Prof. Dr. H. Steinhaus: „O zbieżności szeregów ortogonalnych“.

Dr. Wł. Nikliborc
Sekretarz Oddziału.

M. T. Huber
Prezes Oddziału.

T. Ważewski.

Kontinua prostowalne w związku z funkcjami i odwzorowaniami absolutnie ciągłemi.

W pracy niniejszej zajmuję się kontinuami prostowalnemi, położonemi w przestrzeni n-wymiarowej. Dowodzę, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby kontinuum było prostowalnem (t. j. aby miało skończoną długość) jest, aby było torem ruchomego punktu

$$x_\nu = f_\nu(t), \qquad (\nu/1, \ldots, n)$$

gdzie f_ν są funkcjami absolutnie ciągłemi (czyli nieokreślonemi całkami Lebesgue'a) w pewnym przedziale domkniętym.

Podaję kilka warunków wystarczających i niezbędnych prostowalności kontinuum (§ 24), z których jeden (§ 25) jest konsekwencją niepublikowanego twierdzenia, uprzejmie zakomunikowanego mi przez Prof. W. Wilkosza.

Wykazuję, że z kontinuum takiego można wydzielić przeliczalną liczbę prostowalnych łuków pojedynczych bez punktów wspólnych tak, aby po usunięciu tych łuków pozostał na kontinuum zbiór o długości zero (§ 29).

Twierdzenie to jest charakterystyczne przez to, że nie posiada odpowiednika, o ile chodzi o kontinua K, choćby płaskie, o skończonem polu; istnieją bowiem kontinua płaskie, nie zawierające wnętrza żadnego koła, a mające pola dodatnie.

Wykazuję, że kontinuum prostowalne posiada niemal wszędzie, t. j. z wyjątkiem klasy punktów o długości zero, styczną obustronną — zbiór punktów nie rozcinających go lokalnie ma zatem długość zero (§ 27).

Dowodzę, że każde kontinuum prostowalne K może być aproksymowane co do długości z dowolną dokładnością przez kontinua zawarte w K, homeomorficzne z kontinuami płaskiemi (§ 26).

Zmierzam do celu poprzez funkcje i odwzorowania absolutnie ciągłe, odnośnie do których dostaję dwa twierdzenia o charakterze integralnym (§§ 7 i 20). Jedno z nich implikuje pewną integralną własność pojedynczych łuków prostowalnych (§ 28)

§ 1. **Uwagi wstępne.**

Polem odwzorowania

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\},$$

podporządkowywującego liczbie t punkt n wymiarowy $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, nazywamy ogół liczb t, dla których funkcje $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ („składowe odwzorowania $\Phi(t)$“) są równocześnie określone. Rozpatrywać będziemy jedynie odwzorowania o polu identycznem z polem każdej składowej.

Obrazem zbioru A należącego do pola Φ nazywamy ogół punktów podporządkowanych przez Φ punktom zbioru A. Oznaczamy go przez $\Phi(A)$. Obraz pola odwzorowania Φ nazywamy *zapasem* tego odwzorowania. Jeżeli zbiór B jest częścią zapasu Φ oznaczamy przez $\Phi^{-1}(B)$ ogół takich t, dla których punkt $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ należy do B. Mamy w tym wypadku

$$\Phi[\Phi^{-1}(B)] = B.$$

Jeżeli A należy do pola Φ, to

$$A \subset \Phi^{-1}[\Phi(A)].$$

Odwzorowanie Φ nazywamy *ciągłem* w punkcie t_0 (ewentualnie w zbiorze A), jeżeli jego składowe są ciągłe w tym punkcie (w tym zbiorze).

Mówić będziemy wyłącznie o odwzorowaniach ciągłych, których polem jest przedział domknięty, ograniczony, nie redukujący się do punktu. Odwzorowanie nazywamy *absolutnie ciągłem*, gdy wszystkie jego składowe są funkcjami absolutnie ciągłemi.

Granicą ciągu odwzorowań $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t), \ldots$ nazywamy odwzorowanie, którego składowemi są granice ich odpowiednich składowych.

Dla odwzorowania ciągłego $\Phi(t)$ o polu $[a, b]$ mamy oczywiste:

Twierdzenie 1. Jeżeli A i B są zbiorami domkniętemi (sumami przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych), zawartemi odpo-

wiednio w polu i zapasie Φ, to $\Phi(A)$ i $\Phi^{-1}(B)$ są zbiorami również domkniętemi (sumami domkniętych).

Wniosek. Jeżeli B jest zawartym w zapasie Φ łukiem pojedynczym, z którego usunięto końce, to $\Phi^{-1}(B)$ jest zbiorem mierzalnym. (B jest sumą przeliczalnej liczby łuków domkniętych!)

Twierdzenie 2. Niech $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem odwzorowań ciągłych o wspólnem polu $[a, b] = \Delta$.

Niechaj Z będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym, należącym do zapasu każdego odwzorowania tego ciągu.

Załóżmy, że $\Phi_\nu(t)$ zmierzają w Δ do odwzorowania ciągłego $\Phi(t)$. Niech nadto

$$m\,\Phi_\nu^{-1}(Z) \geqslant k, \qquad (\nu/1, 2, \ldots)\text{ [1]}.$$

Wtedy

$$m\,\Phi^{-1}(Z) \geqslant k.$$

Dowód. Przyjmujemy

$$T_\mu = \Phi_\mu^{-1}(Z), \qquad (\mu/1, 2, \ldots)$$

$$A_\nu = \sum_{\mu/\nu}^{\infty} T_\mu, \qquad (\nu/1, 2, \ldots)$$

$$T = \prod_{\nu/1}^{\infty} A_\nu .$$

Oczywiście

$$A_{\nu+1} \subset A_\nu \text{ [2]}$$

$$m\,A_\nu \geqslant \lim_{\mu/\infty} m\,A_\mu \geqslant k. \qquad (\nu/1, 2, \ldots)$$

Na podstawie znanego twierdzenia mamy stąd

$$(1) \qquad m\,T = m \prod_{\nu/1}^{\infty} A_\nu = \lim_{\mu/\infty} m\,A_\mu \geqslant k.$$

Okażemy, że

$$\Phi(T) \subset Z.$$

Niech $t \in T$ [3]. t należy do nieskończenie wielu T_ν.

$$t \in T_{\alpha_\nu}, \qquad (\nu/1, 2, \ldots)$$

[1]) $m\,A$ = miara lebesgue'owska A.

[2]) $C \subset D$ znaczy C zawiera się w D.

[3]) $t \in T$ znaczy t jest elementem T.

więc

$$\Phi_{\alpha_\nu}(t) \in \Phi_{\alpha_\nu}(T_{\alpha_\nu}) = Z,$$

a że Z jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc w granicy $\Phi(t) \in Z$. Ponieważ t było dowolnym punktem T, przeto $\Phi(T) \subset Z$. Stąd $T \subset \Phi^{-1}(Z)$, a że $\Phi^{-1}(Z)$ jest zbiorem mierzalnym (Tw. 1) więc na mocy (1)

$$m\,\Phi_{-1}(Z) \geqslant m\,T \geqslant k, \qquad \text{c. n. o.}$$

Część I. Funkcje i odwzorowania absolutnie ciągłe.

§ 2. **Lemat.** Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą w $[a, b]$ i oznaczmy przez T ogół x-ów należących do $[a, b]$, dla których $f'(x) \neq 0$. Do każdego $\varepsilon > 0$ należy $\delta > 0$ takie, że skoro A jest dowolnym podzbiorem mierzalnym T, dla którego

$$\int_A |f'(x)|\,dx \leq \delta,$$

to

$$m\,A \leq \varepsilon.$$

D o w ó d. Podzielmy zbiór T na przeliczalną liczbę rozłącznych zbiorów mierzalnych, określonych wzorami

$$T_1 = (\hat{x})(x \in T \,.\, |f'(x)| > 1)\ ^{1})$$

$$T_\nu = (\hat{x})\left(x \in T \,.\, \frac{1}{\nu} < |f'(x)| \leq \frac{1}{\nu - 1}\right), \qquad (\nu/2, 3, \ldots)$$

Załóżmy, że $\varepsilon > 0$. Wybierzmy N tak, by

$$\sum_{\nu/N+1}^{\infty} m\,T_\nu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przyjmijmy $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ i załóżmy, że A jest zbiorem mierzalnym, dla którego

$$A \subset T, \quad \int_A |f'(x)|\,dx \leq \delta.$$

Oznaczmy przez definicję

$$B = A \sum_{\nu/1}^{N} T_\nu, \qquad C = A \sum_{\nu/N+1}^{\infty} T_\nu.$$

[1]) $(\hat{x})\,\varphi(x)$ = klasa wszystkich x-ów, które spełniają warunek $\varphi(x)$.

Oczywiście

(1) $$m\,C \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

a dla x-ów należących do B jest $|f'(x)| > \frac{1}{N}$. Mamy

$$\frac{\varepsilon}{2N} \geqslant \int\limits_A |f'(x)|\,dx = \int\limits_B |f'| + \int\limits_C |f'| \geqslant \frac{1}{N}\,m\,B,$$

skąd

$$m\,B \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

i w końcu na mocy (1)

$$m\,A \leq m\,B + m\,C \leq \varepsilon.$$

§ 3. A) **Twierdzenie.** Jeżeli $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą o polu $[a,b] = \varDelta$ i jeżeli A jest podzbiorem mierzalnym $\varDelta$ to $f(A)$ jest zbiorem mierzalnym. W razie, gdy $m\,A = 0$, to $m\,f(A) = 0$ [1]).

B) **Lemat.** Przy założeniach poprzedniego twierdzenia

$$m\,f(A) \leq \int\limits_A |f'(x)|\,dx.$$

Dowód. Lemat jest słuszny, gdy A jest odcinkiem otwartym lub domkniętym. Oznaczmy np. w ostatnim wypadku przez x_1, x_2 punkty zbioru A, w których f dosięga maximum i minimum na A.

$$m\,f(A) = f(x_1) - f(x_2) = \left|\int\limits_{[x_1,x_2]} f'(x)\,dx\right| \leq \int\limits_A |f'(x)|\,dx.$$

Stąd natychmiast wynika uogólnienie na wypadek, gdy A jest zbiorem otwartym.

Załóżmy, że A jest zbiorem mierzalnym i że $\varepsilon > 0$.

Wybierzmy $\delta > 0$ tak, by $m(B) \leq \delta$ pociągało $\int\limits_B |f'| \leq \varepsilon$. Zakładając, co nie wpływa na ogólność wyniku, że A nie zawiera punktów a i b, zamknijmy zbiór A w zbiorze otwartym O zawartym w $\varDelta$, tak, żeby

$$m(O - A) \leq \delta.$$

---

[1]) S. Banach: Fundamenta Mathematicae, tom VII, str. 229, twierdz. 3.

Wedy

$$mf(A) \leq mf(O) \leq \int_O |f'| = \int_A |f'| + \int_{O-A} |f'| \leq \int_A |f'| + \varepsilon,$$

a stąd natychmiast wynika nasz lemat.

C) Wniosek. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą o polu $[a, b] = \Delta$ i jeśli A jest mierzalnym lub niemierzalnym podzbiorem Δ, na którym niemal wszędzie $f'(x) = 0$, to $mf(A) = 0$.

Dowód. Oznaczmy przez Z ogół x-ów, dla których $f'(x) = 0$. Zbiór $Z_1 = A + Z$ jest zbiorem mierzalnym, na którym niemal wszędzie $f'(x) = 0$. Na podstawie lematu B) $mf(Z_1) \leq \int_{Z_1} |f'| = 0$, skąd tembardziej $mf(A) = 0$.

D) Wniosek. Jeżeli $\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ jest odwzorowaniem absolutnie ciągłem w przedziale $[a, b] = \Delta$ i jeżeli na zbiorze $A \subset \Delta$ niemal wszędzie

(1) $$\sum_{\nu/1}^{n} f'_\nu(t)^2 = 0,$$

to rzut zbioru $\Phi(A)$ na dowolną prostą przestrzeni ma miarę 0.

Dowód. Na podstawie poprzedniego wniosku rzuty $f_1(A), \ldots, f_n(A)$ zbioru A na osie układu mają miarę 0. Wobec każdej kartezjuszowskiej zmiany układu współrzędnych (na nowy układ ortogonalny) związek (1) jest niezmiennikiem, zatem rzut $\Phi(A)$ na dowolną prostą ma miarę 0.

§ 4. Twierdzenie. Jeżeli $\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ jest absolutnie ciągłem odwzorowaniem przedziału Δ, to istnieje $h > 0$ takie, że każda skończona liczba kontinuów bez punktów wspólnych $K_1, \ldots, K_m$ położonych na $\Phi(\Delta)$ ma sumę średnic $\leq h$ [1]). Wystarczy przyjąć

$$h = \sqrt{n} \int_\Delta \sum_{\nu/1}^{n} |f'_\nu(t)|\, dt.$$

Udowodnimy naprzód lemat:

Jeżeli K jest dowolnem kontinuum o średnicy s zawartem w $\Phi(\Delta)$ i $A = \Phi^{-1}(K)$, to

(1) $$s \leq \sqrt{n} \int_A \sum_{\nu/1}^{n} |f'_\nu(t)|\, dt.$$

[1]) Średnica zbioru = górny kres odległości par jego punktów.

Rzeczywiście: Rzut R kontinuum K na jedną conajmniej z osi $x_1,\ldots,x_n$ naprzykład na oś x_μ jest odcinkiem o długości $\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} s$, a zatem $mR \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} s$.

Ponieważ A jest zbiorem domkniętym, a więc i mierzalnym, zatem (por. § 3. B).

$$mR = mf_\mu(A) \leq \int_A |f'_\mu|,$$

skąd

$$s \leq \sqrt{n} \int_A |f'_\mu|,$$

przeto a fortiori nierówność (1) jest słuszna.

Zwróćmy się do dowodu twierdzenia. Oznaczmy średnicę K_μ przez s_μ i przyjmijmy

$$A_\mu = \Phi^{-1}(K_\mu), \qquad (\mu/1,\ldots m).$$

Na podstawie lematu

$$s_\mu \leq \sqrt{n} \int_{A_\mu} \sum_{\nu/1}^{n} |f'_\nu|,$$

a że A_μ są zbiorami bez punktów wspólnych, więc

$$\sum_{\mu/1}^{m} s_\mu \leq \sqrt{n} \sum_{\mu/1}^{m} \int_{A_\mu} \sum_{\nu/1}^{n} |f'_\nu| \leq \sqrt{n} \int_{\Delta} \sum_{\nu/1}^{n} |f'_\nu| \quad \text{c. n. o.}$$

§ 5. Lemat Jeżeli $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą i silnie monotoniczną w przedziale $\Delta = [a, b]$ i jeżeli M jest mierzalnym podzbiorem Δ, to dla obrazu M czyli dla $f(M)$ zachodzi równość:

$$mf(M) = \int_M |f'(x)|\,dx. \tag{1}$$

Dowód. $f(M)$ jest zbiorem mierzalnym (§ 3. A).

Twierdzenie jest słuszne, gdy M jest przedziałem otwartym (sumą rozłącznych przedziałów otwartych). Jest więc słuszne dla M domkniętych (dopełniających do otwartych).

Niech M będzie dowolnym podzbiorem mierzalnym $[a, b]$, nie zawierającym żadnego z jego końców, — zacieśnienie to nie wpływa na ogólność wyniku.

Niech $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, by dla podzbiorów Δ nierówność

$$|mA| \leq \delta$$

pociągała

$$\int_A |f'(x)|\,dx \leq \varepsilon.$$

Niech F i O będą podzbiorami Δ, odpowiednio domkniętym i otwartym, zawartym w M i obejmującym M, o różnicy miar $\leq \delta$.

$$mf(F) \leq mf(M) \leq mf(O),$$

czyli

$$\int_F |f'| \leq mf(M) \leq \int_O |f'|.$$

Oczywiście

$$\int_F |f'| \leq \int_M |f'| \leq \int_O |f'|.$$

Z obu powyższych nierówności wynika

$$\left| mf(M) - \int_M |f'| \right| \leq \int_{O-F} |f'| \leq \varepsilon.$$

§ . Lemat. Niech $f(x)$ będzie funkcją absolutnie ciągłą w przedziale $\Delta = [a, b]$, zaś F domkniętym podzbiorem Δ obejmującym jego końce.

Ustawmy wszystkie przedziały przylegające[1]) do F w ciąg (skończony lub nieskończony)

(1) $$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$$

i przyjmijmy $$\Delta_\nu = [a_\nu, b_\nu].$$

Twierdzę, że funkcja $\varphi(x)$ identyczna z $f(x)$ na F, a linjowa w każdym z domkniętych przedziałów Δ_ν jest absolutnie ciągłą w Δ.

D o w ó d. Oznaczmy przez $\varphi_n(x)$ funkcję identyczną z $f(x)$ poza wnętrzami przedziałów $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ i linjową w każdym z tych przedziałów domkniętych.

Wszystkie $\varphi_n(x)$ są absolutnie ciągłe w Δ; wynika to z twierdzenia, że funkcja absolutnie ciągła w każdym z następujących po

---

[1]) „Intervalles contigus".

sobie przedziałów

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$$

jest absolutnie ciągłą w $[x_0, x_k]$.

Jeżeli ciąg (1) jest skończony, twierdzenie jest słuszne, bo oznaczając przez p numer ostatniego elementu tego ciągu mamy w całem Δ

$$\varphi_p(x) = \varphi(x).$$

Pozostaje wypadek, gdy (1) jest ciągiem nieskończonym. Mamy wtedy w całem Δ

$$\varphi(x) = \lim_{n/\infty} \varphi_n(x).$$

Przyjmijmy

$$c_\nu = \frac{1}{m\Delta_\nu} \int_{\Delta_\nu} |f'|.$$

Mamy dla każdego ν

(2) $$\int_{\Delta_\nu} |f'(x)|\, dx = c_\nu \,.\, m\Delta_\nu. \qquad (\nu/1, 2, \ldots)$$

Twierdzę, że dla $\lambda \geqslant \nu$ i dla każdego zbioru mierzalnego Θ

(3) $$\int_{\Theta\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| \leq c_\nu\, m\, \Theta\Delta_\nu, \qquad (\lambda \geqslant \nu)$$

Zauważmy dla dowodu, że przy $\lambda \geqslant \nu$ jest w całem Δ_ν (za wyjątkiem końców)

$$\varphi'(x) = \frac{f(b_\nu) - f(a_\nu)}{b_\nu - a_\nu},$$

zatem dla każdego zbioru mierzalnego Θ (por. (2))

$$\int_{\Theta\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| = m\,\Theta\Delta_\nu \,.\, \left| \frac{f(b_\nu) - f(a_\nu)}{b_\nu - a_\nu} \right| \leq \frac{m\,\Theta\Delta_\nu}{m\Delta_\nu} \int_{\Delta_\nu} |f'| = c_\nu \,.\, m\,\Theta\Delta_\nu,$$

a to daje (3).

Twierdzę w dalszym ciągu, że dla każdego λ

(4) $$\int_{\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| \leq c_\nu \,.\, m\Delta_\nu. \quad (\lambda/1, 2, \ldots)\ (\nu/1, 2, \ldots)$$

Rzeczywiście: w wypadku $\lambda \geqslant \nu$ (4) jest następstwem (3) przez przyjęcie $\Theta = \Delta_\nu$. W razie $\lambda < \nu$ jest w całem Δ_ν

$$\varphi_\lambda(x) = f(x),$$

skąd $\int\limits_{\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| = \int\limits_{\Delta_\nu} |f'| = c_\nu m\Delta_\nu$, a to pociąga (4).

Szereg $\sum\limits_{\nu/1}^{\infty} c_\nu m\Delta_\nu = \sum\limits_{\nu/1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_\nu} |f'|$ jest oczywiście zbieżnym i ma sumę skończoną.

Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy r tak, aby $\sum\limits_{\nu/r+1}^{\infty} c_\nu \,.\, m\Delta_\nu \leq \frac{\varepsilon}{3}$, zaś $\delta > 0$ w ten sposób, aby równocześnie

$$\delta \sum_{\nu/1}^{r} c_\nu \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\int\limits_B |f'| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

skoro tylko $mB \leq \delta$ i $B \subset \Delta$.

Dla wykazania absolutnej ciągłości φ wystarczy dowieść, że dla każdego skończonego ciągu rozłącznych przedziałów

$$\Theta_\sigma = [y_\sigma, z_\sigma], \qquad (\sigma/1, \ldots, s)$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{\sigma/1}^{s} m\,\Theta_\sigma \leq \delta$$

musi być

$$\sum_{\sigma/1}^{s} |\varphi(y_\sigma) - \varphi(z_\sigma)| \leq \varepsilon.$$

Przyjmijmy

$$\Theta = \sum_{\sigma/1}^{s} \Theta_\sigma.$$

Rozbijmy Θ na trzy zbiory

$$\Theta = \Theta \sum_{\nu/1}^{r} \Delta_\nu + \Theta \sum_{\nu/r+1}^{\infty} \Delta_\nu + \Theta F = C + D + E.$$

Dla każdego $\lambda \geqq r$ mamy (por. (3))

$$\int_C |\varphi'_\lambda| = \sum_{\nu/1}^{r} \int_{\Theta\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| \leq \sum_{\nu/1}^{r} c_\nu \,.\, m\,\Theta\Delta_\nu \leq m\Theta \sum_{\nu/1}^{r} c_\nu \leq \delta \sum_{\nu/1}^{r} c_\nu \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

czyli

(5) $$\int_C |\varphi'_\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (\lambda \geqslant r).$$

Na podstawie (4) mamy dla każdego λ

$$\int_D |\varphi'_\lambda| = \sum_{\nu/r+1}^{\infty} \int_{\Theta\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| \leq \sum_{\nu/r+1}^{\infty} \int_{\Delta_\nu} |\varphi'_\lambda| \leq \sum_{\nu/r+1}^{\infty} c_\nu \,.\, m\,\Delta_\nu \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

czyli

(6) $$\int_D |\varphi'_\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (\lambda/1, 2, \ldots).$$

Na zbiorze $E = \Theta F$, na którym f jest identyczne z każdem φ_λ, ich pochodne są niemal wszędzie identyczne, zatem

(7) $$\int_E |\varphi'_\lambda| = \int_{\Theta F} |f'| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (\lambda/1, 2, \ldots).$$

Ze związków (5), (6), (7) mamy dla każdego $\lambda \geqslant r$

$$\int_\Theta |\varphi'_\lambda| \leq \varepsilon, \qquad (\lambda \geqslant r)$$

tembardziej więc

$$\sum_{\sigma/1}^{s} |\varphi_\lambda(y_\sigma) - \varphi_\lambda(z_\sigma)| \leq \int_\Theta |\varphi'_\lambda| \leq \varepsilon, \qquad (\lambda \geqslant r)$$

a przechodząc do granicy dostajemy

$$\sum_{\sigma/1}^{s} |\varphi(y_\sigma) - \varphi(z_\sigma)| \leq \varepsilon, \qquad \text{c. n. o.}$$

Twierdzenie. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą, w $[a, b] = \Delta$, M jest podzbiorem mierzalnym Δ i $f(x)$ jest silnie monotoniczną na M, to

$$m f(M) = \int_M |f'(x)|\, dx.$$

Dowód. Twierdzenie jest słuszne w przypadku $m M = 0$ (por. § 3 A) str. 13).

Załóżmy $mM > 0$. Rozpatrzymy naprzód przypadek, gdy M jest zbiorem domkniętym.

Oznaczmy przez x', x'' odpowiednio dolny i górny kres M.

Funkcję f modyfikujemy w $[x', x'']$, tak, by była linjową w każdym z domkniętych przedziałów „contigus" i pozostała niezmienioną na M. Nowa funkcja $g(x)$ będzie absolutnie ciągłą na $[x', x'']$ (por. lemat poprzedni), będzie miała niemal wszędzie na M pochodną $= f'(x)$ i będzie silnie monotoniczną na $[x', x'']$.

Na podstawie lematu poprzedniego i lematu § 5 str. 15

$$mf(M) = mg(M) = \int_M |g'| = \int_M |f'|.$$

Zwróćmy się do wypadku ogólnego.

Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $\delta > 0$ tak, by związki $A \subset \Delta$, $mA \leq \delta$ pociągały $\int_A |f'| \leq \varepsilon$.

Wybierzmy w M zbiór domknięty F tak, aby

$$m(M - F) \leq \delta.$$

Oczywiście

$$mf(F) \leq mf(M) \leq \int_M |f'|,$$

czyli

$$\int_F |f'| = \int_M |f'| - \int_{M-F} |f'| \leq mf(M) \leq \int_M |f'|,$$

stąd

$$\left| \int_M |f'| - mf(M) \right| \leq \int_{M-F} |f'| \leq \varepsilon,$$

zaczem

$$mf(M) = \int_M |f'|, \qquad \text{c. n. o.}$$

§ 7. **Twierdzenie.** Niech $f(x)$ będzie funkcją absolutnie ciągłą w przedziale $\Delta = [a, b]$. Oznaczmy przez Z ogół punktów, dla których bądź pochodna nie istnieje, bądź $= 0$. Twierdzę, że do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podzbiór mierzalny T przedziału Δ o mierze $\leq \varepsilon$ oraz sieć $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozpięta na Δ taka, że na każdym ze zbiorów

$$[x_{\nu-1}, x_\nu] - Z - T$$

$f(x)$ jest silnie monotoniczną [1]).

Zanim przystąpimy do dowodu zacytujemy pewne rezultaty Prof. Banacha [2]) i kilka ich natychmiastowych konsekwencyj.

Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą w $[a, b]$ $(a < b)$ i $f(a) \neq f(b)$.

Oznaczmy przez R ogół x-ów takich, że skoro x' należy do $[a, b]$ i $x' < x$, to $f(x') \neq f(x)$.

W wypadku (I), gdy $f(a) < f(b)$ oznaczam przez $P(f, a, b)$ ogół punktów należących do R dla których $f(x) \geqslant f(a)$, zaś w wypadku (II), gdy $f(a) > f(b)$ — ogół elementów klasy R, dla których $f(x) \leq f(a)$. Przy tych oznaczeniach oraz w założeniu, że $f(a) \neq f(b)$ i że f jest ciągłą w $[a, b]$ mamy twierdzenia:

A) $P(f, a, b)$ jest zbiorem mierzalnym.

B) $[f(a), f(b)] \subset f\{P(f, a, b)\}$.

C) $f(x)$ jest w wypadku I silnie rosnącą, w wypadku II silnie malejącą na $P(f, a, b)$.

Z A), B), C) dostajemy na podstawie tw. § 6, str. 19.

D) $|f(b) - f(a)| \leq mf\{P(f, a, b)\} = \int\limits_{P(f,a,b)} |f'|$.

Zwróćmy się do dowodu twierdzenia wysłowionego na początku niniejszego paragrafu.

Niech $\varepsilon > 0$. Dobierzmy (por. lemat § 2, str. 12) $\delta > 0$ tak, żeby dla każdego mierzalnego A związki

$$A \subset \Delta - Z, \qquad \int\limits_A |f'| \leq \delta$$

implikowały nierówność

$$|mA| \leq \varepsilon.$$

Istnieje sieć $x_0, x_1, \dots x_n$ rozpięta na Δ, taka, że

$$(1) \qquad \int\limits_\Delta |f'| - \delta \leq \sum_{\nu/1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leq \int\limits_\Delta |f'|,$$

---

[1]) Każdą funkcję uważamy za silnie monotoniczną na zbiorze pustym oraz na dowolnym zbiorze złożonym z jednego elementu jej pola.

[2]) S. Banach: Fundam. Mathem. T. VIII. Sur une classe de fonctions, str. 167, tw. I.

bo suma występująca w tej nierówności zmierza do warjacji totalnej, a więc do $\int\limits_{\Delta} |f'|$, gdy sieć zagęszczamy.

Oznaczmy przez
Δ_ν przedział $[x_{\nu-1}, x_\nu]$,
a klasę oczek Δ_ν, dla których $f(x_{\nu-1}) \neq f(x_\nu)$,
P_ν zbiór $P(f, x_{\nu-1}, x_\nu) - Z$ w wypadku, gdy $\Delta_\nu \epsilon\, a$,
P_ν zbiór pusty w wypadku przeciwnym.

Przyjąwszy te oznaczenia zauważamy, że $f(x)$ jest silnie monotoniczną na każdem P_ν, zbiory P_ν są mierzalne (por. A), C)).

Ze związku (1) mamy według D):

$$\int\limits_{\Delta - Z} |f'| - \delta \leq \sum_{\nu/1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| = \sum_{a} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| =$$

$$= \sum_{a} \left| \int\limits_{[x_{\nu-1}, x_\nu]} f' \right| \leq \sum_{a} \int\limits_{P(f, x_{\nu-1}, x_\nu)} |f'| = \sum_{a} \int\limits_{P_\nu} |f'| = \int\limits_{\sum\limits_a P_\nu} |f'| \leq \int\limits_{\Delta - Z} |f'|, \text{ [1]}$$

zatem

$$\left| \int\limits_{\Delta - Z} |f'| - \int\limits_{\sum\limits_a P_\nu} |f'| \right| \leq \delta,$$

czyli ze względu na $\sum\limits_a P_\nu \subset \Delta - Z$

$$\int\limits_{\Delta - Z - \sum\limits_a P_\nu} |f'| \leq \delta,$$

skąd

$$m(\Delta - Z - \sum_a P_\nu) \leq \varepsilon.$$

Kładąc

$$\Delta - Z - \sum_a P_\nu = T,$$

dostajemy ze względu na to, że Z i $\sum\limits_a P_\nu$ są rozłączne i zawarte w Δ

$$\sum_a P_\nu = \sum_{\nu/1}^{n} P_\nu = \Delta - Z - T,$$

$$P_\nu = \Delta_\nu - Z - T, \qquad (\nu/1, \ldots, n)$$

$$m\, T \leq \varepsilon.$$

---

[1]) $\sum\limits_a$ oznacza sumę rozciągniętą na wielkości odpowiadające przedziałom klasy a.

Związki te wraz z uwagą, że f jest silnie monotoniczną na P_ν, dowodzą słuszności twierdzenia.

§ 8. Lemat 1. Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą w przedziale Δ. Niech U będzie ogółem x-ów, dla których $f'(x) \neq 0$ i niechaj A będzie zbiorem o mierze > 0 zawartym w U. Twierdzę, że $m f(A) > 0$.

Dowód. $f(A)$ jest zbiorem mierzalnym (§ 3 A), str. 13). Przyjmijmy

$$\varepsilon = \frac{m A}{2} > 0, \qquad Z = \Delta - U.$$

Na podstawie twierdzenia z § 7 istnieje zbiór T

$$T \subset \Delta, \qquad m T \leq \varepsilon = \frac{mA}{2}$$

i sieć $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozpięta na Δ taka, że na każdym ze zbiorów

$$C_\nu = [x_{\nu-1}, x_\nu] - Z - T, \qquad (\nu/1, \ldots, n)$$

$f(x)$ jest silnie monotoniczną. Oczywiście

(1)
$$\sum_{\nu/1}^{n} C_\nu = \Delta - Z - T$$

(2)
$$m(A - T) \geqslant \frac{m A}{2} = \varepsilon > 0.$$

Ponieważ $A \subset U = \Delta - Z$, więc na mocy (1)

$$A - T \subset \Delta - Z - T = \sum_{\nu/1}^{n} C_\nu.$$

Stąd dostajemy na podstawie (2)

$$m(A - T) = \sum_{\nu/1}^{n} m\, C_\nu (A - T) > 0,$$

zatem miara przynajmniej jednego ze zbiorów $C_\nu(A - T)$ powiedzmy zbioru $D_\lambda = C_\lambda(A - T)$ jest > 0. Ponieważ na zbiorze tym $f(x)$ jest silnie monotoniczną, a pochodna na nim jako na części A jest stale $\neq 0$, więc (tw. § 6, str. 19)

$$m f(C_\lambda(A - T)) = \int_{D_\lambda} |f'(x)|\, dx > 0$$

i tembardziej $m f(A) > 0$.

Lemat 2. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją absolutnie ciągłą o polu $\Delta = [a, b]$ i jeżeli $A \subset \Delta$, $mf(A) = 0$, to niemal wszędzie na A $f'(x) = 0$. (A może być zbiorem mierzalnym lub niemierzalnym).

Dowód. I. W wypadku, gdy A jest zbiorem mierzalnym lemat nasz wynika natychmiast z lematu poprzedniego.

II. W wypadku ogólnym połóżmy

$$f(A) = M, \qquad N = f(\Delta) - M.$$

Mamy $mM = mf(A) = 0$.

Istnieje zbiór N_1 będący sumą przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych, dla którego

$$mN_1 = mN = mf(\Delta)$$

$$N_1 \subset N.$$

Połóżmy $M_1 = f(\Delta) - N_1$.

Oczywiście

(1) $$M \subset M_1, \qquad mM_1 = 0$$

$f^{-1}(N_1)$ jest sumą przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych (§ 1, tw. I, str. 10), zatem zbiorem mierzalnym.

Połóżmy $A_1 = \Delta - f^{-1}(N_1)$. Oczywiście

(2) $$f^{-1}(M_1) = A_1, \quad M_1 = f(A_1), \quad A \subset f^{-1}(M) \subset f^{-1}(M_1) = A_1$$

Z (1) i (2) wnosimy na podstawie wypadku I, że na zbiorze mierzalnym A_1, a zatem i na jego części A pochodna $f'(x)$ jest niemal wszędzie $= 0$.

Wniosek. Jeżeli $\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ jest odwzorowaniem absolutnie ciągłem w $[a, b] = \Delta$ i jeżeli A jest podklasą Δ, taką, że $\Phi(A)$ rzutuje się na każdą z osi układu jako zbiór miary 0, to niemal wszędzie na A

$$\sum_{\nu/1}^{n} [f'_\nu(x)]^2 = 0.$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć ze względu na lemat poprzedni, że $mf_\nu(A) = 0$ $(\nu/1, \ldots, n)$.

§ 9. **Lemat.** Załóżmy, że $\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ jest absolutnie ciągłem odwzorowaniem o polu $[a, b] = \Delta$.

Oznaczmy przez T ogół liczb t, dla których

$$\sum_{\nu/1}^{n} [f'_\nu(t)]^2 > 0.$$

Załóżmy, że łuk pojedynczy L o długości σ^*, nie redukujący się do punktu zawiera się w $\Phi(\Delta)$ i przyjmijmy $S = \Phi^{-1}(L)$.

Niech $\Psi(\sigma) = \{g_1(\sigma), \ldots, g_n(\sigma)\}$ będzie naturalną reprezentacją L w $[0, \sigma^*]$ (— parametrem σ jest długość łuku liczona od jednego z jego końców).

Twierdzę, że istnieje zbiór T_1 o własnościach

$$m\,T_1 = 0, \qquad T_1 \subset \Delta$$

taki, że związki

$$t \in ST - T_1, \quad \Phi(t) = \Psi(\sigma)$$

pociągają równość

$$f'_\lambda(t) = \varepsilon(t) \sqrt{\sum_{\nu/1}^{n} [f'_\nu(t)]^2} \cdot g'_\lambda(\sigma), \qquad (\lambda/1, \ldots, n)$$

gdzie $[\varepsilon(t)]^2 = 1$.

Dowód. I. Oznaczmy przez T_2 ogół punktów zbioru $S \cdot T$, dla których gęstość bądź nie istnieje, bądź nie równa się jedności. Oczywiście:

II. $m\,T_2 = 0$.

III. Zbiór $ST - T_2 - U$, gdzie U jest dowolnym zbiorem miary 0, jest w sobie gęstym (t. j. każdy jego punkt jest dlań punktem skupienia).

(Wystarczy zauważyć, że zbiór ten składa się wyłącznie z punktów o gęstości 1, które muszą być jego punktami skupienia).

IV. Jeżeli

$$t_\mu \in ST - T_2, \qquad (\mu/1, 2, \ldots)$$
$$t_0 \in ST - T_2,$$
$$t_\mu \neq t_0, \qquad (\mu/1, 2, \ldots)$$
$$\lim_{\mu/\infty} t_\mu = t_0,$$

to od pewnego μ' począwszy jest stale

$$\Phi(t_\mu) \neq \Phi(t_0). \qquad (\mu/\mu' + 1, \mu' + 2, \ldots)$$

W przeciwnym razie byłoby dla pewnego ciągu wybranego $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots$

$$\sum_{\nu/1}^{n}\left(\frac{f_\nu(t_{\alpha_\mu})-f_\nu(t_0)}{t_{\alpha_\mu}-t_0}\right)^2=0, \qquad (\mu/1, 2, \ldots)$$

skąd w granicy

$$\sum_{\nu/1}^{n}[f'_\nu(t_0)]^2=0,$$

co jest niemożliwe, bo $t_0 \in T$.

V. Funkcja $\Psi^{-1}(k)$ punktu k położonego na łuku L jest ciągłą na L (bo Ψ jest odwzorowaniem ciągłem i jednojednoznacznem).

VI. $\Psi^{-1}(\Phi(t))$ jest funkcją ciągłą na S, jako funkcja złożona z dwu funkcyj ciągłych.

VII. Związek $\Phi(t)=\Psi(\sigma)$ jest równoważny związkom

$$\sigma=\Psi^{-1}(\Phi(t), \qquad t \in S,$$

(bo odwzorowanie Ψ jest jednoznaczne i $S=\Phi^{-1}(L)$.

VIII. Oznaczmy przez Ω_3 ogół punktów przedziału $[0, \sigma^*]$, dla których $\sum_{\nu/1}^{n}[g'_\nu(\sigma)]^2$ bądź nie istnieje, bądź $\neq 1$. Mamy

$$m(\Omega_3)=0,$$

a zatem rzut $\Psi(\Omega_3)$ na każdą z osi układu jest miary 0 (por. § 3 D), str. 14).

IX. Przyjmijmy

$$T_3=\Phi^{-1}[\Psi(\Omega_3)].$$

Jest (por. § 1, str. 10)

$$\Phi(T_3)=\Psi(\Omega_3).$$

Na podstawie VIII dostajemy (zob. § 8, wniosek, str. 24):

X. Na zbiorze T_3 jest niemal wszędzie

$$\sum_{\nu/1}^{n}[f'_\nu(t)]^2=0,$$

skąd

$$m\,T_3T=0.$$

XI. Jeżeli $t \in S-T_3$ i $\Phi(t)=\Psi(\sigma)$, to

$$\sum_{\nu/1}^{n}[g'_\nu(\sigma)]^2=1,$$

bo wtedy (por. VIII i IX) σ należy do $[0, \sigma^*]-\Omega_3$.

XII. Jeżeli

(1) $$t_0 \epsilon ST - T_2 - TT_3,$$

to α) istnieje σ_0, dla którego

(2) $$\Phi(t_0) = \Psi(\sigma_0),$$

β) dla każdego takiego σ_0 mamy

$$f'_\lambda(t_0) = \varepsilon(t_0)\sqrt{\sum_{\nu/1}^{n}[f'_\nu(t_0)]^2 g'_\lambda(\sigma_0)}, \qquad (\lambda/1,\ldots,n)$$

gdzie

$$\varepsilon(t_0)^2 = 1.$$

Istotnie, załóżmy, że (1) zachodzi. Z (1) wynika $t_0 \epsilon S$, zatem istnieje σ_0 spełniające (2). Z (2) dostajemy na podstawie VII

(3) $$\sigma_0 = \Psi^{-1}(\Phi(t_0)).$$

Zgodnie z III i X istnieje ciąg t_μ o własnościach

(4) $$t_\mu \epsilon ST - T_2 - TT_3, \quad t_\mu \neq t_0, \quad \lim_{\mu/\infty} t_\mu = t_0.$$

Według IV od pewnego μ' począwszy

(5) $$\Phi(t_\mu) \neq \Phi(t_0), \qquad (\mu > \mu').$$

Przyjmijmy

(6) $$\sigma_\mu = \Psi^{-1}(\Phi(t_\mu)).$$

Prawa strona ma sens, bo według (4) $t_\mu \epsilon S$.

Z (6) dostajemy na podstawie VII

(7) $$\Phi(t_\mu) = \Psi(\sigma_\mu). \qquad (\mu/1, 2, \ldots)$$

Ponieważ odwzorowanie $\Psi(\sigma)$ jest jednojednoznaczne, więc zgodnie z (3), (5), (6)

(8) $$\sigma_\mu \neq \sigma_0, \qquad (\mu > \mu').$$

Z (4), (3) i (6) wnioskujemy na podstawie VI

$$\lim_{\mu/\infty} \sigma_\mu = \sigma_0.$$

Dla $\mu > \mu'$ mamy na zasadzie (2), (7), (4) i (8)

(9) $$\frac{g_\lambda(\sigma_\mu) - g_\lambda(\sigma_0)}{\sigma_\mu - \sigma_0} \cdot \frac{\sigma_\mu - \sigma_0}{t_\mu - t_0} = \frac{f_\lambda(t_\mu) - f_\lambda(t_0)}{t_\mu - t_0}, \; (\lambda/1,\ldots n), \; (\mu > \mu')$$

skąd

$$\left(\frac{\sigma_\mu - \sigma_0}{t_\mu - t_0}\right)^2 \sum_{\lambda/1}^{n} \left(\frac{g_\lambda(\sigma_\mu) - g_\lambda(\sigma_0)}{\sigma_\mu - \sigma_0}\right)^2 = \sum_{\lambda/1}^{n} \left(\frac{f_\lambda(t_\mu) - f_\lambda(t_0)}{t_\mu - t_0}\right)^2,$$

a przechodząc do granicy mamy (por. XI i definicja zbioru T)

$$\lim_{\mu/\infty} \left(\frac{\sigma_\mu - \sigma_0}{t_\mu - t_0}\right)^2 = \sum_{\lambda/1}^{n} [f'_\lambda(t_0)]^2.$$

Istnieje zatem ciąg wybrany $\alpha_1, \alpha_2, ..$, dla którego

$$\lim \frac{\sigma_{\alpha_\mu} - \sigma_0}{t_{\alpha_\mu} - t_0} = \varepsilon(t_0) \sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} [f'_\lambda(t_0)]^2}, \qquad \varepsilon(t_0)^2 = 1.$$

Biorąc odpowiedni ciąg wybrany dostajemy zatem z (9)

$$f'_\lambda(t_0) = \varepsilon(t_0) \sqrt{\sum_{\nu/1}^{n} [f'_\lambda(t_0)]^2}\, g'_\lambda(\sigma_0), \qquad (\lambda/1, \dots n)$$

gdzie $\varepsilon(t_0)^2 = 1$.

Przyjmując $T_1 = T_2 + T_3 T$ stwierdzamy opierając się na II i X, że lemat nasz jest słuszny.

Część II. Absolutnie ciągłe obrazy odcinka.

§ 10. **Definicja.** Kontinuum ograniczone K, z którem związana jest liczba $h < +\infty$ taka, że każda skończona liczba jego podkontinuów bez punktów wspólnych ma sumę średnic $\leq h$, nazywam kontinuuum „à variation bornée" lub *kontinuum o ograniczonej zmienności.*

§ 11. **Twierdzenie.** Kontinuum o ograniczonej zmienności nie zawiera żadnego łuku pojedynczego nieprostowalnego, ani nieskończonego ciągu łuków pojedynczych, prostowalnych, nie mających między sobą nic wspólnego poza końcami, a mających nieskończoną sumę długości.

D o w ó d sprowadza się do dwu następujących lematów.

Lemat 1. Do każdej liczby $h (0 < h < +\infty)$ można dobrać na każdym łuku pojedynczym nieprostowalnym L skończonę liczbę łuków bez punktów wspólnych o sumie średnic $\geqslant h$. Rzeczywiście:

Wybierzmy na L poczynając od jednego końca, a kończąc na pozostałym, ciąg następujących po sobie punktów $P_0, P_1, \dots P_{2n}$ tak,

aby

(1) $$\sum_{\nu/1}^{2n} \varrho(P_{\nu-1}, P_\nu) > 2h.$$

($\varrho(A, B)$ = odległość punktu A od punktu B).

Albo łuki odpowiadające parzystym, albo nieparzystym wyrazom sumy (1) będą miały sumę średnic $\geqslant h$. Łuki te nie będą miały między sobą punktów wspólnych.

Lemat 2. Na każdym pojedynczym prostowalnym łuku L o długości $l > 0$ istnieje skończona liczba rozłącznych łuków nie nie zawierających końców L o sumie średnich $\geqslant \frac{l}{4}$.

Dowód jest podobny do dowodu lematu poprzedniego.

§ 12. **Twierdzenie.** Absolutnie ciągły obraz odcinka (t. j. obraz przedziału domkniętego w odwzorowaniu absolutnie ciągłem) jest kontinuum o ograniczonej zmienności.

Jest to natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia § 4, str. 14.

§ 13. **Definicja.** Nieskończony ciąg pojedynczych prostowalnych łuków $L_1, L_2, \ldots$, o długościach $l_1, l_2, \ldots$ nazywam *ciągiem dendrytowym*, jeżeli

1°) $l_\nu > 0$, $(\nu/1, 2, \ldots)$.

2°) Szereg $\sum_{\nu/1}^{\infty} l_\nu$ ma sumę skończoną.

3°) $L_{n+1} \sum_{\nu/1}^{n} L$ redukuje się do jednego z końców łuku L_{n+1}, $(n/1, 2, \ldots)$.

Wypowiedź, że *kontinuum* K *jest rozwijalne w ciąg dendrytowy* $L_1, L_2, \ldots$, oznacza, że

$$K = \overline{\sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu}.$$ [1]

§ 14. **Twierdzenie.** Nie redukujące się do punktu kontinuum K o ograniczonej zmienności jest rozwijalne w ciąg dendrytowy.

Dowód. Wybierzmy $h > 0$ tak, by każda skończona liczba rozłącznych podkontinuów naszego kontinuum K miała sumę średnic $\leq h$ (por. § 10, str. 28).

---

[1] $\bar{A}$ oznacza zbiór A wraz z jego punktami skupienia.

α) K jest kontinuum jordanowskiem, w razie przeciwnym istniałby bowiem na K nieskończony ciąg rozłącznych podkontinuów o nieskończonej sumie średnic, a zatem i skończony ciąg o sumie średnic $> h$ [1]).

β) K nie zawiera żadnego łuku nieprostowalnego (por. § 11, str. 28).

γ) Wybierzmy na kontinuum jordanowskiem K dwa dowolne różne od siebie punkty i połączmy je łukiem pojedynczym P o końcach a, b zawartym w K [2]). Oznaczmy przez L_1 którykolwiek łuk zawarty w P, nie redukujący się do punktu i różny od P.

L_1 jest łukiem prostowalnym (por. β).

$$K - L_1 \neq 0.$$

Przypuśćmy, że określono ciąg prostowalnych, nie redukujących się do punktu łuków pojedynczych $L_1, \ldots, L_n$ o własnościach

I. $\sum\limits_{\nu/1}^{n} L_\nu \subset K$.

II. Jeżeli $n \geqslant 2$, to zbiór

$$L_n \sum_{\nu/1}^{n-1} L_\nu$$

redukuje się do jednego z końców L_n.

III. $K - \sum\limits_{\nu/1}^{n} L_\nu \neq 0$.

IV. Oznaczając przez m_ν średnicę L_ν, przez $\varrho_{\nu-1}$ maximum odległości punktów $K - \sum\limits_{\mu/1}^{\nu-1} L_\mu$ od $\sum\limits_{\mu/1}^{\nu-1} L_\mu$ mamy w razie, gdy $n \geqslant 2$

$$m_\nu \geqslant \tfrac{1}{2}\, \varrho_{\nu-1} \cdot \qquad (\nu/2, \ldots, n).$$

Własności I—IV są spełnione dla ciągu złożonego z jednego tylko łuku L_1.

Określam L_{n+1}. Według III mamy

$$\varrho_n > 0.$$

---

[1]) Wynika to łatwo przez małą modyfikację dowodu pewnego twierdzenia Prof. Mazurkiewicza (Fund. Math. T. I. str. 176. Twierdz. IV).

[2]) S. Mazurkiewicz: Fund. Mathem. tom I. Sur les lignes de Jordan str. 201. Twierdz. IX.

Ponieważ K jest zbiorem ograniczonym i domkniętym, istnieje więc c

$$c \in K - \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu,$$

dla którego $\varrho\left(c, \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu\right) = \varrho_n$ [1]).

Połączmy [2]) w obrębie K punkt c z dowolnie wybranym punktem d zbioru $\sum_{\nu/1}^{n} L_\nu$ zapomocą łuku pojedynczego M. Oznaczmy przez e punkt, w którym wyszedłszy z c i poruszając się po M napotykamy po raz pierwszy punkt zbioru $\sum_{\nu/1}^{n} L_\nu$.

Nazwijmy N łuk częściowy M o końcach c i e.

Oczywiście średnica $(N) \geqslant \varrho_n$.

Niech f będzie pierwszym licząc od e punktem na N, w którym $\varrho(f, e) = \frac{\varrho_n}{2}$.

Oznaczę przez L_{n+1} łuk częściowy N o końcach e, f. L_{n+1} jest łukiem prostowalnym nie redukującym się do punktu.

Oczywiście m_{n+1} = średnica $L_{n+1} \geqslant \frac{\varrho_n}{2}$ (własność IV).

Własności I, II, III (w których n zastąpiono przez $n+1$) zachodzą dla łuku L_{n+1} — wynika to wprost z jego definicji.

Oznaczając przez l_ν długość L_ν, stwierdzamy że ciąg $L_1, L_2, \ldots$ spełnia własności 1⁰) i 3⁰) ciągu dendrytowego (por. § 13). Własność 2⁰) z § 13 zachodzi na podstawie § 11. Ciąg ten jest zatem ciągiem dendrytowym. Pozostaje wykazać (por. § 13), że

$$\overline{\sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu} = K.$$

Ponieważ $\sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu \subset K$, wystarczy udowodnić, że związek

---

[1]) $\varrho(c, A)$ oznacza odległość punktu c od zbioru A, t. j. dolny kres odległości punktów zbioru A od punktu c. $\varrho(a, b)$ = odległość punktów a, b.

[2]) Wykonanie rysunku ułatwi lekturę.

(1) $$g \in K - \sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu$$

pociąga

(2) $$\varrho\left(g, \sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu\right) = 0.$$

Ze związku (1) mamy

(3) $$0 \leq \varrho\left(g, \sum_{\nu/1}^{\infty} L_\nu\right) \leq \varrho\left(g, \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu\right) \leq \varrho_n \leq 2\, m_{n+1} \leq 2\, l_{n+1}.$$

l_{n+1}, jako wyraz zbieżnego szeregu, zmierza do 0.

Przechodząc z (3) do granicy dostajemy (2).

§ 15. Definicja. *Zaszczepienie* $Z(\Psi, \beta, \Phi, s, \alpha)$ *odwzorowania* $\Psi(t)$ *na odwzorowaniu* $\Phi(t)$.

Załóżmy, że odwzorowania

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$$
$$\Psi(t) = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$$

spełniają następujące warunki $W(\Psi, \beta, \Phi, s, \alpha)$:

1. Są absolutnie ciągłe w swych polach $[0, 2s]$ i $[0, 2\beta]$, $(s > 0, \beta > 0)$.

2. Niemal wszędzie na $[0, 2s]$

$$\sum_{\nu/1}^{n} [f'_\nu(t)]^2 = \left(\frac{\alpha}{s}\right)^2, \quad (\alpha > 0, \ \alpha + \beta \leq s).$$

3. Niemal wszędzie na $[0, 2\beta]$

$$\sum_{\nu/1}^{n} [g'_\nu(t)]^2 = 1.$$

4. Istnieje $t_0 \in [0, 2s]$, dla którego

$$\Phi(t_0) = \Psi(0) = \Psi(2\beta).$$

W tych warunkach oznaczmy przez t' najmniejszą z pośród liczb t_0 spełniających 4.

Przyjmijmy w przedziale

(I) $$\left[0, \frac{\alpha t'}{\alpha + \beta}\right]$$

$$h_\nu(t) = f_\nu\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} t\right), \qquad (\nu/1, \ldots n),$$

w przedziale

(II) $$\left[\frac{\alpha t'}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha t'+2\beta s}{\alpha+\beta}\right]$$

$$h_\nu(t) = g_\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{s}t - \frac{\alpha t'}{s}\right), \quad (\nu/1, \ldots, n)$$

oraz w przedziale

(III) $$\left[\frac{\alpha t'+2\beta s}{\alpha+\beta}, 2s\right]$$

$$h_\nu(t) = f_\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}t - \frac{2\beta s}{\alpha}\right), \quad (\nu/1, \ldots, n).$$

Odwzorowanie

$$\Omega(t) = \{h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)\}$$

nazywam zaszczepieniem Ψ na Φ i oznaczam przez $Z(\Psi, \beta, \Phi, s, \alpha)$.

Otrzymaliśmy je z Φ i Ψ przekształcając linjowo przedziały $[0, t']$, $[t', 2s]$ składające się na pole Φ odpowiednio na przedziały I i III, oraz pole $\Psi = [0, 2\beta]$ na przedział II.

§ 16. Przy założeniu, że zachodzą warunki $W(\Psi, \beta, \Phi, s, \alpha)$, zaszczepienie Ω posiada następujące łatwo sprawdzalne własności:

A) $\Omega(t)$ jest absolutnie ciągłem odwzorowaniem o polu $[0, 2s]$. W przedziale tym jest niemal wszędzie

$$\sum_{\nu/1}^{n} h'_\nu(t)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{s}\right)^2.$$

Każda z funkcyj h_ν spełnia warunek Lipschitza:

$$|h_\nu(t') - h_\nu(t'')| \leqq \frac{\alpha+\beta}{s}|t'-t''| \leqq |t'-t''|,$$

gdy $t' \epsilon [0, 2s]$, $t'' \epsilon [0, 2s]$.

B) $\Omega([0, 2s]) = \Phi([0, 2s]) + \Psi([0, 2\beta])$ (por. § 1, str. 10).

C) Jeżeli M jest zbiorem mierzalnym zawartym w $[0, 2s]$, to istnieje zbiór M', dla którego

$$\Omega(M') = \Phi(M), \; m\,M' \geqq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} m\,M \geqq \frac{\alpha}{s} m\,M.$$

C') Jeżeli Z jest zbiorem domkniętym i

$$Z \subset \Phi([0, 2s])$$

to $$m\,\Omega^{-1}(Z) \geqq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} m\,\Phi^{-1}(Z) \geqq \frac{\alpha}{s} m\,\Phi^{-1}(Z).$$

D) Jeżeli N jest zbiorem mierzalnym zawartym w $[0, 2\beta]$, to istnieje zbiór N', dla którego

$$m N' \geqslant \frac{s}{\alpha+\beta} m N \geqslant m N, \quad \Omega(N') = \Psi(N).$$

D') Jeżeli Z jest zbiorem domkniętym i

$$Z \subset \Psi([0, 2\beta])$$

to $$m\, \Omega^{-1}(Z) \geqslant \frac{s}{\alpha+\beta} m\, \Psi^{-1}(Z) \geqslant m\, \Psi^{-1}(Z).$$

§ 17. **Twierdzenie.** Jeżeli

(1) $$L_1, L_2,$$

jest dendrytowym ciągiem łuków o długościach $l_1, l_2, \dots$ (por. § 13, str. 29) i jeżeli przyjmiemy

$$s = \sum_{\mu/1}^{\infty} l_\mu,$$

to a) istnieje absolutnie ciągłe odwzorowanie $\Phi(t)$ o polu $[0, 2s]$, dla którego

$$\Phi([0, 2s]) = \overline{\sum_{\mu/1}^{\infty} L_\mu}.$$

b) Oznaczając przez L'_μ resztę, pozostającą z L_μ po usunięciu końców, mamy

$$L'_\mu \cdot L'_\varrho = 0, \quad (\mu \neq \varrho).$$

c) Zbiór $\overline{\Sigma L_\mu} - \Sigma L'_\mu$ rzutuje się na każdą prostą przestrzeni n-wymiarowej jako zbiór o mierze linjowej 0.

D o w ó d. Część b) jest oczywistą (zob. § 13).

Oznaczmy przez a_1 jeden z końców L_1. Zbiór

(1) $$a_{\mu+1} = L_{\mu+1} \sum_{\lambda/1}^{\mu} L_\lambda$$

redukuje się do jednego z końców $L_{\mu+1}$ (zob. § 13).

Biorąc na łuku L_μ jako parametr długość łuku t liczoną od końca a_μ dostaniemy jego reprezentację parametryczną w $[0, l_\mu]$

$$\bar{g}^1_\mu(t), \dots, \bar{g}^n_\mu(t).$$

Określmy $g_\mu^\nu(t)$ przez warunki

$$g_\mu^\nu(t) = \bar{g}_\mu^\nu(t) \qquad \text{w przedziale } [0, l_\mu]$$
$$g_\mu^\nu(t) = \bar{g}_\mu^\nu(2l_\mu - t) \qquad \text{„} \qquad [l_\mu, 2l_\mu]$$
$$(\mu/1, \dots \infty); \quad (\nu/1, \dots, n).$$

Odwzorowanie

$$\Phi_\mu(t) = \{g_\mu^1(t), \dots, g_\mu^n(t)\}$$

jest absolutnie ciągłe w przedziale $[0, 2l_\mu]$ oraz

(2) $$\Psi_\mu([0, 2l_\mu]) = L_\mu,$$
(3) $$\Psi_\mu(0) = \Psi_\mu(2l) = a_\mu.$$

Nadto niemal wszędzie w $[0, 2l_\mu]$

$$\sum_{\nu/1}^{n} \left(\frac{d}{dt} g_\mu^\nu(t)\right)^2 = 1. \qquad (\mu/1, \dots \infty).$$

Określamy ciąg odwzorowań $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots$ w sposób następujący

$$\Phi_1(t) = \Psi_1\left(\frac{l_1}{s} t\right),$$
$$\Phi_{\mu+1}(t) = Z(\Psi_{\mu+1}, l_{\mu+1}, \Phi_\mu, s, l_1 + \dots + l_\mu).$$

Zaszczepienie powyższe jest możliwe w wypadku $\mu = 1$, bo zachodzą warunki $W(\Psi_2, l_2, \Phi_1, s, l_1)$ (zob. § 15, str. 32).

Istotnie: Odwzorowania Φ_1 i Ψ_2 są absolutnie ciągłe w swych polach odpowiednio $[0, 2s]$ i $[0, 2l_2]$.

Składowe $f_1^1(t), \dots, f_1^n(t)$ odwzorowania $\Phi_1(t)$ spełniają niemal wszędzie w $[0, 2s]$ związek

$$\sum_{\nu/1}^{n} \left(\frac{d}{dt} f_1^\nu(t)\right)^2 = \left(\frac{l_1}{s}\right)^2, \qquad (l_1 > 0,\ l_1 + l_2 < s),$$

zaś składowe $\Psi_2(t)$ w $[0, 2l_2]$ związek

$$\sum_{\nu/1}^{n} \left(\frac{d}{dt} g_1^\nu(t)\right)^2 = 1.$$

Ponieważ $\Psi_2(0) = \Psi_2(2l_2) = a_2$, (por. (3))

$$a_2 \in L_1, \qquad \text{(zob. (1))}$$
$$L_1 = \Psi_1([0, l_1]) = \Phi_1([0, 2s]), \qquad \text{(zob. (2) i def. } \Phi_1)$$

istnieje więc t_0, dla którego

$$\Psi_2(0) = \Psi_2(2\,l_2) = \Phi_1(t_0).$$

Cytowane warunki zachodzą, zaszczepienie jest zatem możliwe i musi spełniać warunki A) — D') § poprzedniego. Opierając się na tym paragrafie upewniamy się na podstawie indukcji matematycznej o następujących własnościach odwzorowań Φ_μ

α) $\Phi_\mu(0, 2s] = L_1 + \ldots + L_\mu$, $(\mu/1, \ldots \infty)$

β) Jeżeli L''_μ jest łukiem domkniętym i

$$L''_\mu \subset L'_\mu,$$

to $$m\,\Phi_\lambda^{-1}(L''_\mu) \geqslant 2 \text{ długość } L''_\mu. \qquad (\lambda \geqslant \mu).$$

γ) Przyjmując $\Phi_\mu(t) = \{f^1_\mu(t), \ldots, f^n_\mu(t)\}$, mamy dla każdych t', t'' leżących w $[0, 2s]$

$$|f^\nu_\mu(t') - f^\nu_\mu(t'') \leq |t' - t''|, \quad (\nu/1, \ldots, n), \ (\mu/1, \ldots \infty).$$

Ciąg odwzorowań $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t), \ldots$ jest ograniczony w $[0, 2s]$, — własność α) daje nam bowiem

$$\Phi_\mu([0, 2s]) \subset \sum_{\lambda/1}^{\infty} L_\lambda,$$

a zbiór po prawej stronie ma średnicę $\leq s$.

Wnosimy stąd, że każdy z ciągów funkcyj

(4) $$f^\nu_1(t), f^\nu_2(t), \ldots \qquad (\nu/1, \ldots n)$$

jest ograniczony w $[0, 2s]$. Na podstawie własności γ) każdy z tych ciągów jest równomiernie ciągły w $[0, 2s]$[1]).

Na zasadzie twierdzenia Ascoli'ego[2]) wnioskujemy stąd o istnieniu rosnącego ciągu wskaźników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dla którego ciąg wybrany z (4)

$$f^\nu_{\alpha_1}, f^\nu_{\alpha_2}, \ldots$$

jest zbieżny $(\nu/1, \ldots n)$.

Przyjmijmy $$\lim_{\mu/\infty} f^\nu_{\alpha_\mu}(t) = f^\nu(t), \qquad (\nu/1, \ldots n).$$

Własność γ) daje nam w granicy dla każdych t', t'' leżących w $[0, 2s]$

$$|f^\nu(t') - f^\nu(t'')| \leq |t' - t''|.$$

---

[1]) Egalement continue.

[2]) Zob. n. p. Tonelli: Calcolo delle Variazioni t. I. str. 76.

Funkcje $f^\nu(t)$ spełniają więc warunek Lipschitza w przedziale $[0, 2s]$ — są przeto absolutnie ciągłe równie jak i odwzorowanie $\Phi(t) = \{f^1(t), \ldots, f^n(t)\}$.

Dla dowodu części a) naszego twierdzenia pozostaje okazać, że

$$\Phi([0, 2s]) = \overline{\sum_{\lambda/1}^{\infty} L_\lambda},$$

a to wynika z łatwością z własności α) i γ) odwzorowań $\Phi_\mu(t)$.

Dla dowodu części c) oprę się na własności β).

Wykażę naprzód, że

(5) $$m\,\Phi^{-1}\left(\sum_{\lambda/1}^{\infty} L'_\lambda\right) = 2s.$$

Zwróćmy uwagę na którekolwiek L'_λ. Niech $\varepsilon > 0$.
Z L'_λ wydzielmy domknięty łuk L''_λ o długości l''_λ tak, by

$$l''_\lambda \geqslant l_\lambda - \varepsilon.$$

Na podstawie własności β)

$$m\,\Phi^{-1}_{\alpha_\nu}(L''_\lambda) \geqslant 2\,l''_\lambda, \qquad (\alpha_\nu > \lambda),$$

a w granicy (tw. 2, § 1, str. 11)

$$m\,\Phi^{-1}(L''_\lambda) \geqslant 2\,l''_\lambda \geqslant 2\,l_\lambda - 2\,\varepsilon.$$

Ponieważ $\Omega^{-1}(L'_\lambda)$ jest zbiorem mierzalnym (tw. 1, § 1, str. 11), mamy tembardziej

$$m\,\Phi^{-1}(L'_\lambda) \geqslant 2\,l_\lambda - 2\,\varepsilon,$$

a na skutek dowolności ε

$$m\,\Phi^{-1}(L'_\lambda) \geqslant 2\,l_\lambda, \qquad (\lambda/1, \ldots \infty).$$

Ponieważ zbiory L'_λ są rozłączne, więc dodając mamy

(6) $$m\,\Phi^{-1}\left(\sum_{\lambda/1}^{\infty} L'_\lambda\right) \geqslant 2 \sum_{\mu/1}^{\infty} l_\mu = 2s.$$

Ale

(7) $$\Phi^{-1}\left(\sum_{\lambda/1}^{\infty} L'_\lambda\right) \subset [0, 2s],$$

zatem łącząc (6) i (7) dostaję

$$m\,\overline{\Phi^{-1}}\left(\sum_{\mu/1}^{\infty} L_\mu - \sum_{\mu/1}^{\infty} L'_\mu\right) = 0,$$

a stąd natychmiast wyniknie część c) po oparciu się na lemacie, że obraz zbioru miary 0 rzutuje się na każdą prostą jako zbiór miary 0 (§ 3 D, str. 14).

§ 18. Twierdzenie. Każde kontinuum K o ograniczonej zmienności jest absolutnie ciągłym obrazem odcinka.

Dowód. Na podstawie § 14 str. 29 K jest rozwijalne w ciąg dendrytowy, zatem na podstawie poprzedniego twierdzenia (część a) jest absolutnie ciągłym obrazem odcinka.

Łącząc niniejsze twierdzenie z twierdzeniem paragrafu poprzedniego, § 12 (str. 29) i § 14 otrzymujemy:

§ 19. Twierdzenie. Pojęcia absolutnie ciągłego odwzorowania odcinka, kontinuum o ograniczonej zmienności (por. def. § 10, str. 28) i kontinuum rozwijalnego w ciąg dendrytowy (por. def. § 13, str. 29) pokrywają się.

§ 20. Twierdzenie. Jeżeli

(1) $$f_1(t), \ldots, f_n(t)$$

są funkcjami absolutnie ciągłemi w $[a, b] = \Delta$, to istnieje zbiór miary zero T taki, że skoro t_1 i t_2 należą do $\Delta - T$ i

$$f_\nu(t_1) = f_\nu(t_2), \qquad (\nu/1, \ldots n),$$

to rząd macierzy

(2) $$\begin{vmatrix} f'_1(t_1), \ldots, f'_n(t_1) \\ f'_1(t_2), \ldots, f'_n(t_2) \end{vmatrix}$$

jest mniejszy od 2.

Dowód. I) Przyjmijmy:

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$$

i zacieśnijmy pole Φ do przedziału Δ w razie, gdyby funkcje (1) były określone też poza Δ.

Oznaczmy przez M, Z, U zbiory, w których odpowiednio

(3) $$\sum_{\nu/1}^{n} f'_\nu(t)^2$$

nie istnieje, $= 0$, > 0.

M, Z, U nie mają punktów wspólnych i w sumie dają na Δ.

W razie, gdy $\Phi(\Delta) = K$ redukuje się do punktu, twierdzenie jest słuszne, bo wtedy $\Delta = Z$ i macierz (2) składa się z samych zer.

Odrzucając ten wypadek, rozwińmy $\Phi(\Delta)$ (zob. § 19) w ciąg dendrytowy $L_1, L_2, \ldots$ i oznaczmy przez L'_α resztę pozostającą z L_α po usunięciu końców.

Na podstawie § 17 c) (str. 34) zbiór $K - \sum_{\alpha/1}^{\infty} L'_\alpha$ i tembardziej jego część $K - \sum_{\alpha/1}^{\infty} L_\alpha$ rzutuje się na każdą prostą jako zbiór miary 0. Wnosimy stąd (§ 8, wniosek, str. 24), że na zbiorze

(4) $$A = \Phi^{-1}\left(K - \sum_{\alpha/1}^{\infty} L_\alpha\right)$$

jest niemal wszędzie $\sum_{\nu/1}^{n} f'_\nu(t)^2 = 0$. Stąd

(5) $$m(A \, . \, U) = 0.$$

Przyjmijmy

(6) $$S_\alpha = \Phi^{-1}(L_\alpha), \qquad (\alpha/1, 2, \ldots).$$

Mamy oczywiście:

II) Jeżeli $t_1 \in S_\alpha$ i $\Phi(t_1) = \Phi(t_2)$, to $t_2 \in S_\alpha$, $(\alpha/1, 2, \ldots)$.

III) Z drugiej strony na podstawie (4) i (6)

$$\Delta - A = \sum_{\alpha/1}^{\infty} S_\alpha,$$

ale

$$U - (UA) = U - A \subset \Delta - A,$$

więc

(7) $$U - (UA) \subset \sum_{\alpha/1}^{\infty} S_\alpha.$$

Niech $G_\alpha(s) = \{g_1^\alpha(s), \ldots, g_n^\alpha(s)\}$ będzie reprezentacją naturalną łuku L_α (parametrem jest długość łuku liczona od jednego z jego końców). Według § 9, str. 24:

IV) Istnieje zbiór T_α taki, że

(8) $$m\,T_\alpha = 0, \qquad (\alpha/1, 2, \ldots)$$

i taki, że skoro $t \epsilon US_\alpha - T_\alpha$, to istnieje dokładnie jedno s, dla którego

$$G(s) = \Phi(t),$$

$$f'_\nu(t) = \varepsilon(t) \frac{d}{ds}[g^\alpha_\nu(s)] \sqrt{\sum_{\nu/1}^{\infty} f'_\nu(t)^2}, \qquad (\nu/1, \ldots n), \ \alpha(1, 2, \ldots)$$

$$\varepsilon(t)^2 = 1.$$

V) Przyjmijmy

(9) $$T = M + AU + \sum_{\alpha/1}^{\infty} T_\alpha.$$

Na podstawie (5), (8) i definicji zbioru M mamy

(10) $$m\,T = 0.$$

Według (9) $M \subset T$, więc

$$-T \subset -M,\text{[1]}$$

skąd, mnożąc obustronnie przez Δ, dostajemy

$$\Delta - T \subset \Delta - M,$$

ale $\Delta - M = U + Z$, bo zbiory U, M, Z są rozłączne i dają w sumie Δ. Mamy zatem

$$\Delta - T \subset U + Z,$$

skąd, mnożąc obustronnie przez $\Delta - T$, otrzymujemy

(11) $$\Delta - T = (\Delta - T)U + (\Delta - T)Z.$$

Z drugiej strony według (9)

$$-T \subset -(AU).$$

Oczywiście

$$\Delta U \subset U.$$

Mnożąc stronami powyższe inkluzje mamy

$$(\Delta - T)U \subset U - (AU),$$

skąd według (7)

$$(\Delta - T)U \subset \Sigma S_\alpha.$$

[1]) $-C$ oznacza uzupełnienie zbioru C do prostej liczbowej. $D - C$ oznacza $D.(-C)$.

Mnożąc ten związek obustronnie przez U dostajemy

$$(\Delta - T) U \subset U \Sigma S_\alpha .$$

Według (9) jest

$$- T \subset - \Sigma T_\alpha .$$

Mnożąc stronami obie powyższe inkluzje otrzymujemy

(12) $$(\Delta - T) U \subset U \Sigma S_\alpha - \Sigma T_\alpha .$$

W każdym punkcie zbioru $\Delta - T$ suma $\sum_{\nu/1}^{n} f'_\nu(t)^2$ jest określona, bo zbiór ten nie ma żadnego punktu wspólnego z M.

Załóżmy

(13) $$t_1 \epsilon \Delta - T, \quad t_2 \epsilon \Delta - T, \quad \Phi(t_1) = \Phi(t_2).$$

Jeśli jeden z punktów t_1, t_2 należy do $(\Delta - T) Z$, to macierz (1) jest rzędu < 2, bo jeden jej wiersz składa się z samych zer.

Pozostaje wypadek (zob. (11))

(14) $$t_1 \epsilon (\Delta - T) . U, \quad t_2 \epsilon (\Delta - T) U.$$

Według (12) t_1 należy do pewnego S_α, powiedzmy do S_β, zatem (por. (13) i II) $t_2 \epsilon S_\beta$, czyli

$$t_1 \epsilon S_\beta, \quad t_2 \epsilon S_\beta,$$

stąd zaś i z (12)

$$t_1 \epsilon S_\beta - T_\beta, \quad t_2 \epsilon S_\beta - T_\beta,$$

a według (14) jest w końcu

$$t_1 \epsilon U S_\beta - T_\beta, \quad t_2 \epsilon U S_\beta - T_\beta .$$

Ze względu na IV istnieje więc dokładnie jedno s_1, dla którego

$$\Phi(t_1) = \Phi(t_2) = G_\beta(s_1)$$

$$f'_\nu(t_1) = \varepsilon_\beta(t_1) \frac{d}{ds} g^\beta_\nu(s_1) \sqrt{\Sigma f'_\nu(t_1)^2}$$

$$f'_\nu(t_2) = \varepsilon_\beta(t_2) \frac{d}{ds} g^\beta_\nu(s_1) \sqrt{\Sigma f'_\nu(t_2)^2}, \qquad (\nu/1, \ldots, n),$$

$$\varepsilon_\beta(t_1)^2 = \varepsilon_\beta(t_2)^2 = 1.$$

Podstawmy te wartości do macierzy (2) i zwróćmy uwagę na to, że oba powyższe pierwiastki są różne od zera (t_1 i $t_2 \epsilon U$!).

Dzieląc wiersze macierzy przez różne od zera liczby $\varepsilon_\beta(t_1)$. $\varepsilon_\beta(t_2)$ i przez oba pierwiastki nie zmienimy jej rzędu, a dostaniemy macierz

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d}{ds} g^\beta_1(s_1), \ldots, \frac{d}{ds} g^\beta_n(s_1) \\ \frac{d}{ds} g^\beta_1(s_1), \ldots, \frac{d}{ds} g^\beta_n(s_1) \end{matrix} \right\|$$

o obu wierszach identycznych. Rząd jej jest < 2.

§ 21. Definicja. Mówimy, że zbiór A położony w przestrzeni n-wymiarowej posiada w punkcie $p_0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n)$ styczną obustronną, jeżeli

1^0) $p_0 \in A$.

2^0) Istnieje ciąg liczb $\xi_1, \ldots, \xi_n$ o następujących własnościach:

α) Można wskazać ciąg punktów $p_\beta = (x_1^\beta, \ldots, x^\beta_n)$ takich, że

$$p_\beta \neq p_0, \quad p_\beta \in A, \ (\beta/1, 2, \ldots), \quad \lim_{\beta/\infty} p_\beta = p_0,$$

$$\lim_{\beta/\infty} \frac{x^\beta_\lambda - x^0_\lambda}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} (x^\beta_\lambda - x^0_\lambda)^2}} = \xi_\lambda, \quad (\lambda/1, \ldots, n).$$

β) Istnieje ciąg punktów

$$q_\beta = (y^\beta_1, \ldots, y^\beta_n)$$

takich, że

$$q_\beta \neq p_0, \quad q_\beta \in A, \ (\beta/1, 2, \ldots), \quad \lim_{\beta/\infty} q_\beta = p_0,$$

$$\lim_{\beta/\infty} \frac{y^\beta_\lambda - x^0_\lambda}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} (y^\beta_\lambda - x^0_\lambda)^2}} = -\xi_\lambda, \quad (\lambda/1, \ldots, n).$$

δ) Jeżeli

$$r_\beta = (z^\beta_1, \ldots, z^\beta_n) \in A, \quad r_\beta \neq p_0, \ (\beta/1, 2, \ldots), \quad \lim_{\beta/\infty} r_\beta = p_0,$$

$$\lim_{\beta/\infty} \frac{z^\beta_\lambda - x^0_\lambda}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} (z^\beta_\lambda - x^0_\lambda)^2}} = \eta_\lambda \quad (\lambda/1, \ldots, n),$$

to albo $\eta_\lambda = \xi_\lambda$, $(\lambda/1, \ldots, n)$, albo $\eta_\lambda = -\xi_\lambda$, $(\lambda/1, \ldots, n)$

Uwaga. Jasnem jest, że jeżeli istnieje ciąg $\xi_1, \ldots, \xi_n$ o własnościach α, β, δ, to istnieje tylko jeden dalszy ciąg o tych własnościach, mianowicie ciąg $-\xi_1, \ldots, -\xi_n$.

§ 22. **Twierdzenie.** Zbiór punktów na kontinuum K o ograniczonej zmienności, w których nie istnieje styczna obustronna do K (por. § 21) rzutuje się na każdą prostą przestrzeni jako zbiór miary 0.

D o w ó d. Pomijamy banalny wypadek, gdy K redukuje się do punktu. Oznaczmy (zob. § 19, str. 38) przez $\Phi(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ absolutnie ciągłe odwzorowanie o polu $[a, b] = \Delta$, dla którego $\Phi(\Delta) = K$.

Oznaczmy, jak w § 20, str. 38, przez M, Z, U zbiory, w których $\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} f_\lambda'(t)^2}$ odpowiednio nie istnieje, $= 0$, > 0.

Dobierzmy zbiór T tak, aby czynił zadość twierdzeniu z § 20, str. 38 i aby ponadto obejmował końce Δ.

Przyjmijmy (por. § 1, str. 10)

(1) $$W = T + Z,$$
$$W_1 = \Phi^{-1}(\Phi(Z + T)).$$

Mamy $\Phi(W_1) = \Phi(Z + T)$ $W \subset W_1$.

Zbiór $\Phi(Z + T)$, a zatem i identyczny z nim zbiór $\Phi(W_1)$ rzutuje się na każdą prostą jako zbiór miary zero (§ 3 D), str. 14).

Przyjmijmy

$$U = \Delta - W, \quad U_1 = \Delta - W_1.$$

Mamy

(2) $$U_1 \subset \Delta - T,$$
$$U_1 + W_1 = \Delta.$$

(3) $$U_1 \subset U,$$
$$\Phi(U_1) \, . \, \Phi(W_1) = 0.$$

(4) $$\Phi(U_1) = \Phi(\Delta) - \Phi(W_1),$$
$$\Phi^{-1}(\Phi(U_1)) = U_1.$$

Z ostatniego związku wnosimy, że związki

(5) $$t_0 \in U_1, \quad \Phi(t_0) = \Phi(t')$$

pociągają

(6) $$t' \in U_1.$$

Na podstawie (4) wystarczy wykazać, że K ma w każdym punkcie zbioru $\Phi(U_1)$ obustronną styczną.

Niech $p_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Phi(U_1)$.

Własność 1^0) paragrafu poprzedniego zachodzi.

Istnieje

(7) $$t_0 \in U_1,$$

dla którego

(8) $$\Phi(t_0) = p_0.$$

Według (3) jest

(9) $$\sum_{\lambda/1}^{n} f'_\lambda(t_0)^2 \neq 0.$$

Przyjmijmy

(10) $$\xi_\lambda = \frac{f'_\lambda(t_0)}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} f'_\lambda(t_0)^2}}, \qquad (\lambda/1,\ldots,n).$$

Sprawdzimy, że zachodzą własności α, β, δ § poprzedniego.

Niech ciąg punktów $t_1, t_2, \ldots$ zmierza do t_0 z prawej strony. ($t_\alpha \neq t_0$; $\alpha/1,2\ldots$). Według (9) od pewnego wyrazu począwszy $\Phi(t_\alpha) \neq \Phi(t_0)$, — bez szkody dla ogólności możemy założyć, że zachodzi to począwszy od pierwszego wyrazu t. j.

$$\Phi(t_\alpha) \neq \Phi(t_0), \quad (\alpha/1,2,\ldots).$$

Przyjmijmy

$$p_\alpha = \Phi(t_\alpha) = \{f_1(t_\alpha),\ldots,f_n(t_\alpha)\} = (x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha).$$

Oczywiście

$$p_\alpha \neq p_0, \quad p_\alpha \in K, \ (\alpha/1,2,\ldots), \quad \lim p_\alpha = p_0,$$

$$\frac{x_\lambda^\alpha - x_\lambda^0}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n}(x_\lambda^\alpha - x_\lambda^0)^2}} = \frac{f_\lambda(t_\alpha) - f_\lambda(t_0)}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n}(f_\lambda(t_\alpha) - f_\lambda(t_0))^2}}, \qquad (\lambda/1,\ldots n;\ \alpha/1,\ldots).$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony przez

$$t_\alpha - t_0 > 0$$

i przechodząc do granicy widzimy, że prawa strona, a zatem i lewa zmierza do ξ_λ.

Sprawdziliśmy, że własność α § poprz. zachodzi. Własność β sprawdzamy biorąc ciąg t_α zmierzający do t_0 z lewej strony.

Pozostaje własność δ.

Załóżmy, że

$$r_\alpha = (z_1^\alpha,\ldots,z_n^\alpha) \in \Phi(\Delta), \quad (\alpha/1,2,\ldots),$$

(11) $$r_\alpha \neq p_0, \quad (\alpha/1, 2, \ldots),$$

(12) $$\lim_{\alpha/\infty} r_\alpha = p_0,$$

(13) $$\lim_{\alpha/\infty} \frac{z_\lambda^\alpha - x_\lambda^0}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} (z_\lambda^\alpha - x_\lambda^0)^2}} = \eta_\lambda, \qquad (\lambda/1, \ldots, n).$$

Istnieje t_α, dla którego

(14) $$r_\alpha = \Phi(t_\alpha),$$

(15) $$z_\lambda^\alpha = f_\lambda(t_\alpha), \quad (\lambda/1, \ldots, n; \ \alpha/1, 2 \ldots).$$

Z ciągu t_α wybierzmy ciąg zbieżny

$$\lim_{\alpha/\infty} t_{\gamma_\alpha} = t'.$$

Według (8), (12), (14)

(16) $$\Phi(t') = \Phi(t_0) = p_0,$$

a zatem (por. (7), (5), (6))

(17) $$t' \in l_1.$$

Z (11) dostajemy

$$t_{\gamma_\alpha} \neq t'.$$

Z ciągu $\{t_{\gamma_\alpha}\}$ można wybrać ciąg zmierzający do t' z prawej (I) lub z lewej strony (II).

Wychodząc z (13), (15) i (17) i posługując się tym ciągiem wybranym, dostajemy przechodząc do granicy w wypadkach I i II odpowiednio

(18) $$\eta_\lambda = \frac{f_\lambda'(t')}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} f_\lambda'(t')^2}},$$

względnie

(18 bis) $$\eta_\lambda = -\frac{f_\lambda'(t')}{\sqrt{\sum_{\lambda/1}^{n} f_\lambda'(t')^2}}, \qquad (\lambda/1, \ldots n).$$

Rozumujemy w tym celu tak samo, jak przy sprawdzeniu własności α i β.

Na podstawie (7), (17) i (2) macierz

$$\begin{vmatrix} f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0) \\ f_1'(t'), \ldots, f_n'(t') \end{vmatrix}$$

jest rzędu < 2, zatem na podstawie (10) i (18) mamy wypadkach I i II' odpowiednio

$$\eta_\lambda = \xi_\lambda, \quad (\lambda/1,\ldots,n)$$
$$\eta_\lambda = -\xi_\lambda; \quad (\lambda/1,\ldots,n).$$

W ten sposób stwierdziliśmy, że własność δ paragrafu poprzedniego zachodzi.

Część III. Zastosowania do kontinuów i łuków prostowalnych.

§ 23. Rezultaty następnych paragrafów słuszne są przy każdej takiej definicji D długości zbiorów, odnośnie do której zachodzą następujące twierdzenia[1]):

1⁰) W wypadku, gdy zbiór jest położony na pojedynczym łuku prostowalnym, definicja D daje identyczny wynik z klasyczną co do istnienia długości zbioru i co do jej wartości.

2⁰) Dla zbiorów mających skończoną długość (= prostowalnych), długość części nie przekracza długości całości.

3⁰) Każdy zbiór domknięty, zawarty w zbiorze prostowalnym, jest prostowalny.

4⁰) Rzut zbioru prostowalnego na dowolną prostą jest mierzalny i miara rzutu nie przekracza długości zbioru.

5⁰) Długość sumy skończonej lub przeliczalnej ilości zbiorów rozłącznych i prostowalnych równa się sumie ich długości.

6⁰) Długość zbioru, rzutującego się na każdą prostą, jako zbiór miary zero, wynosi zero.

§ 24. **Twierdzenie.** Pojęcia: Kontinuum o ograniczonej zmienności (§ 10, str. 28), kontinuum rozwijalnego w ciąg dendrytowy (§ 13, str. 29), absolutnie ciągłego odwzorowania odcinka i kontinuum prostowalnego (§ 23) — zlewają się.

Dowód. Na podstawie § 19, str. 38 wystarczy okazać identyczność kontinuum prostowalnego z kontinuum o ograniczonej zmienności.

Niech K będzie kontinuum prostowalnem.

K jest ograniczone (§ 23, 4⁰). Oznaczmy długość K przez $s < +\infty$. Niech $K_1,\ldots,K_n$ będą rozłącznemi podkontinuami K. Niechaj a_ν, b_ν będą punktami na K_ν, których odległość $\varrho(a_\nu, b_\nu)$ równa się średnicy K_ν. Rzut K_ν na prostą a_ν, b_ν ma długość $\geqslant \varrho(a_\nu, b_\nu)$. Kontinua K_ν są prostowalne (§ 23, 3⁰).

---

[1]) Definicjami takiemi są między innemi definicja Peany i Jansena.

Według § 23. 4°

$$\varrho(a_\nu, b_\nu) \leq \text{długość } K_\nu .$$

Sumując i korzystając z § 23. 2° i 5° mamy

$$\sum_{\nu/1}^{n} \varrho(a_\nu, b_\nu) \leq \text{długość } \sum_{\nu/1}^{n} K_\nu \leq s,$$

co dowodzi, że K jest kontinuum o ograniczonej zmienności (por. § 10, str. 28).

Załóżmy z koleji, że K jest kontinuum o ogranicznej zmienności.

Pomijamy wypadek, gdy K redukuje się do punktu.

Rozwińmy K w ciąg dendrytowy $L_1, L_2, \ldots$ (por. § 19, str. 38).

Oznaczając przez l_ν długość L_ν mamy (§ 13, str 29)

$$(1) \qquad \sum_{\nu/1}^{\infty} l_\nu = h < +\infty .$$

Oznaczmy przez L'_ν resztę pozostającą z L_ν po odrzuceniu końców. Według § 17, b), str. 34

$$L'_\mu \cdot L'_\nu = 0, \quad (\mu \neq \nu),$$

stąd zaś wnosimy na podstawie (1) i § 23, 1°, że

$$\text{długość } \sum_{\nu/1}^{\infty} L'_\nu = h.$$

Zbiór $K - \Sigma L'_\nu$ rzutuje się na każdą prostą jako zbiór miary zero (por. § 17 c, str. 34), zatem według § 23, 6°. długość jego wynosi zero. Stąd (§ 23, 5°)

$$\text{długość } K = \text{długość } \Sigma L'_\nu + \text{długość } (K - \Sigma L'_\nu) = h < +\infty .$$

Uwaga 1. Twierdzenie powyższe daje nam trzy kryterja konieczne i wystarczające, aby kontinuum było prostowalnem.

Uwaga 2. Możemy uzyskać inne kryterjum opierając się na twierdzeniu[1]): Jeżeli $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ są funkcjami o ograniczonej

[1]) Twierdzenie to, jeszcze nie publikowane, zostało zakomunikowane mi uprzejmie przez Prof. W. Wilkosza.

zmienności o wspólnem polu $\Delta = [a, b]$, to istnieje ciągłe i jedno-jednoznaczne odwzorowanie przedziału Δ w siebie $t = \varphi(\tau)$ takie, że $f_1(\varphi(\tau)), \ldots, f_n(\varphi(\tau))$ są funkcjami absolutnie ciągłemi w Δ.

Mamy zatem:

§ 25. Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby K było kontinuum prostowalnem iest, aby istniały funkcje o ograniczonej zmienności

$$\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\} = \Psi(t),$$

określone w przedziale Δ, dla których

$$K = \Psi(\Delta).$$

§ 26. Twierdzenie. Jeżeli K jest nie redukującem się do punktu kontinuum prostowalnem, to istnieje ciąg podkontinuów K_ν homeomorficznych ze zbiorami płaskiemi (dendrytów)[1])

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots$$

takich, że

$$\text{długość } K = \lim_{\nu/\infty} \text{długość } K_\nu.$$

Wystarczy przyjąć $K_\nu = \sum_{\alpha/1}^{\nu} L_\alpha$ (por. § 24, str. 47).

§ 27. Twierdzenie. Kontinuum prostowalne posiada obustronną styczną wszędzie poza pewnym zbiorem o długości zero.

Wynika to z § 22, str. 43 z § 23, 6^0 i z § 24.

§ 28. Twierdzenie. Jeżeli L jest łukiem pojedynczym prostowalnym, położonym w przestrzeni trójwymiarowej, zaś d jest dowolną prostą, to można z L usunąć zbiór B o długości zero tak, że

1^0) Styczna do L istnieje w każdym punkcie zbioru $L - B$.

2^0) Jeżeli d_1 jest prostą równoległą do d, to wszystkie styczne poprowadzone do L w punktach zbioru $(L - B) \cdot d_1$ leżą w tej samej płaszczyźnie $\Pi(d_1)$ zależnej od położenia d_1.

Dowód. Niech $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ stanowią naturalną reprezentację L w przedziale $[0, l]$ (l = długość L).

Rozpatrzmy tylko wypadek, gdy d pokrywa się o osią z — inne sprowadzają się do niego przez zmianę układu spółrzędnych.

---

[1]) T. Ważewski: Sur les courbes de Jordan etc. Annalles de la Soc. Polon. d. Math., rocznik 1924.

Niech C będzie podzbiorem $[0, l]$, w którym $\sum_{\nu/1}^{3} f'_\nu(s)^2$ nie istnieje lub nie równa się jedności, zaś T niech będzie (por. § 20, str. 38) zbiorem miary zero takim, żeby związki

$$s_1 \epsilon [0, l] - T, \quad s_2 \epsilon [0, l] - T$$

pociągały

$$\begin{vmatrix} f'_1(s_1), & f'_2(s_1) \\ f'_1(s_2), & f'_2(s_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Wystarczy przyjąć $B = \Phi(C + T)$, gdzie $\Phi(s)$ jest naszą naturalną reprezentacją L.

Uwaga. Twierdzenie daje się uogólnić na *kontinua* prostowalne położone w przestrzeni n-wymiarowej ($n \geqslant 3$).

§ 29. Twierdzenie. Na każdem kontinuum K prostowalnem nie redukującem się do punktu istnieje przeliczalna liczba pojedynczych prostowalnych łuków otwartych (= pozbawionych końców), nie mających punktów wspólnych, po których usunięciu pozostaje na K zbiór o długości 0.

Wynika to natychmiast z § 17, c), str. 34, z § 24 i z § 23, 6°.

ERRATA.

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*winno być*
26	11	jednoznaczne	jednojednoznaczne
40	2	$G(s)$	$G_\alpha(s)$
40	3	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon_\alpha(t)$
40	4	„	„